**Liceo Industrial Superior Talca**

**Dpto. de Matemáticas.**

 **Prof(a): Marisol Martínez B.**

 **Nivel: 4° medios**

**2°Eje Temático:** Algebra y Funciones

**Unidad temática1:** Expresiones algebraicas.

**Descripción:** Productos notables

Factorizaciones de expresiones algebraicas

 Operatoria con expresiones algebraicas

 Problemas que involucren expresiones algebraicas en diversos contextos.

 **I: Algebra**

**1.- Expresiones algebraicas:**

En el álgebra utilizamos una serie de conceptos básicos para poder comprender y operar en el “lenguaje matemático”. Por ejemplo, el concepto de **expresión algebraica,** que es un conjunto de cantidades expresadas con letras y números ligados entre si por operaciones.

**Ejemplos:**

1. 35ax2 – 2
2. 7m – 2m2 – 12
3. m v2
4. 2

Una expresión algebraica está compuesta por **términos**. En un término, las cantidades están ligadas por multiplicación y/o división. Los términos están separados entre sí por las operaciones suma y/o resta. De este modo, la expresión del:

 ejemplo 1 tiene dos términos (binomio)

 ejemplo 2 tiene tres términos (trinomio)

 ejemplo 3 y 4 tienen un solo termino (monomio).

En un término hay un factor numérico (o coeficiente) y un factor literal, como lo muestra el siguiente esquema:

 **Factor numérico**

 **3**

 Parte literal

En un término:

* El coeficiente 1 no se escribe
* El signo de multiplicación entre dos letras no se escribe
* El signo multiplicación entre un número y una letra no se escribe

**Ejemplo:** **1 h x2** se escribe: **hx2**

**1.1.- Términos semejantes**

Decimos que dos monomios o términos son **semejantes** cuando poseen la misma parte literal. Para sumar varios monomios semejantes debemos sumar algebraicamente sus coeficientes numéricos y, luego, multiplicar el resultado por la parte literal. Los términos que no **son semejantes** no pueden ser reducidos.

**Ejemplo 1:** 3xy + 5w – 4x + 2xy + 2x – 4xy = xy – 2x + 5w

**Ejemplo 2:** 5xy2 – 15h + 3 + 2xy2 – 4xy2 – 10h + 29 = 3xy2 – 25h + 32

**1.2.-** **Uso de paréntesis:** 

En álgebra los paréntesis se usan para agrupar términos y separar operaciones.

Para eliminar paréntesis debes fijarte en el signo que tengan:

* Si es **positivo,** se elimina **manteniendo todos los signos** que están dentro de él.
* Si es **negativo**, se elimina **cambiando todos los signos** que están dentro de él.

 **Ejemplos:**

1. 2a + 2) 3x – (6x + 1) + (x –3 )

2a x + a 1 a x + 3 3x – 6x – 1 + x – 3

 2a 2x + 2 2x – 4

**1.3.- Producto de monomio por monomio**

Para multiplicar dos monomios, se multiplican los coeficientes entre si y los términos literales entre si.

**Ejemplo:** 23m2x 4mx = 23 4 m2 m x x2 = 92 m3 x2

**1.4.- Multiplicación de polinomios**

Para multiplicar dos polinomios, se debe multiplicar cada termino de uno de los polinomios por todos los del otro, y luego reducir términos semejantes.

**Ejemplo 1:** (2x + 7x2y)(4 – 3x) = 2x (4 – 3x) + 7x2y (4 – 3x)

 = 8x – 6x2 + 28x2y – 21x3y

**Ejemplo 2:** (11k – 7j)(k – 2j) = 11k (k – 2j) 7 j (k – 2j)

 = 11k2 22kj 7jk + 14j2  (términos semejantes kj = jk)

 = 11k2 29kj + 14j2

**2.- Productos notables**

Son multiplicaciones de expresiones algebraicas que se utilizan muy frecuentemente. Debido a esto, son utilizadas como formulas.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Producto notable** | **Expresión** | **Desarrollo** | **Ejemplos** |
| Cuadrado de binomio | (x + y)2 | X2 + 2xy + y2 | (5 + 3R)2 = 25 + 30R + 9 R2 |
| Cuadrado de binomio | (x – y)2 | X2 – 2xy + y2 | (2H – 4X)2 = 4H2 – 16HX + 16X2 |
| Suma por su diferencia | (x + y)(x – y) | X2 – y2  | (7 + )(7 ) = 72 – ( )2 = 49 – 3 = 46 |
| Cubo de binomio | (x + y)3 | X3 + 3x2y + 3xy2 + y3  | (2 + a)3 = 8 + 12a + 6a2 + a3 |
| Cubo de binomio | (x – y)3 | X3 3x2y + 3xy2  y3 | (X – 3 )3 = X3 – 9X2 + 27X – 27  |

**Observación:** recuerda que (x + y)2 = (x + y)(x + y), luego lo multiplicas como polinomios, sino deseas usar la formula.

**3.- Factorización**

La factorización de una expresión algebraica consiste en convertirla en producto de expresiones más simples.

Hay varias formas de **factoriza**r, de las cuales veremos las más utilizadas.

* **Por factor común:** Cuando un factor está presente en los distintos términos de una expresión, es posible expresarla como producto de ese factor común por un polinomio.

**Ejemplo 1:** La expresión La expresión 8m2 – 6m es posible factorizarla como

 2m 4m – 2m 3 = 2m (4m – 3)

**Ejemplo 2:** La expresión 12r2 – 18r – 3 es posible factorizarla como

 3 4r2 – 6r 3 – 3 1 = 3 (4r2 – 6r – 1)

 También es posible factorizar por 3r (4r – 6 – 1/r ), recuerda que, 3r =

**Ejemplo 3:** Verificar las factorizaciones:

* 3p + 9p2 – 27p3 = 3p (1 + 3p – 9 p2)
* 16ky + 4k – 16ky2 = 4k (4y + 1 – 4y2)
* x3y3 + x4y3 – x3y4 = x3y3 (1 + x – y)
* **Por productos de binomios:** expresiones de la forma: +

 x(x + a) + b(x + a) son posibles de expresar como el producto: (x + a)(x + b). Esto requiere agrupar, considerando el factor común de cada grupo, y luego el paréntesis repetido se saca como factor común de los otros términos que lo contienen.

**Ejemplo 1:** Factorizar x2 + 5x + 6

 Dos números que sumados dan 5 y multiplicados dan 6 son el 3 y el 2.

 Luego, x2 + 5x + 6 = (x + 2)( x + 3)

**Ejemplo 2:** Factorizar x2 – 6x – 40

 Dos números que sumados dan -6 y multiplicados dan -40 son el 4 y el -10.

 Luego, x2 – 6x – 40 = (x + 4)(x – 10)

**Ejemplo 3:** Factorizar x2 – 9x + 20

 Dos números que sumados dan -9 y multiplicados dan 20 son el -4 y el -5.

 Luego, x2 – 9x + 20 = (x – 4)(x – 5)

* **Otra manera de factorizar un trinomio de la forma** **ax2 + bx + c**

 **Ejemplo 4:** Factoriza 2x2 11x + 5

1º El primer término se descompone en dos factores 2x x

2º Se buscan los divisores del tercer término 5 1 ó -5 -1

3º Parcialmente la factorización sería (2x + 5) (x + 1)

 pero no sirve pues da : 2x2 + 7x + 5

 entonces, se reemplaza por ( 2x 1 )( x 5 )

 y en este caso nos da : 2x2 11x + 5

 Luego, 2x2 – 11x + 5 = 2x2 – 11x + 5

* **Por productos notables:** Utilizaremos este método cuando la expresión corresponde al desarrollo de un producto notable tal como cuadrado de binomio, suma por su diferencia, etc.

 **Ejemplo 1:** Factorizar x2 – 6x + 9

 Esta expresión corresponde al desarrollo del cuadrado de binomio: (x – 3)2,

 calculas la raíz cuadrada del tercer término; = 3

 Luego, x2 – 6x + 9 = (x – 3)2 = (x – 3)(x – 3)

 **Ejemplo 2:** Factorizar 36x2 + 120x + 100

 Esta expresión corresponde al desarrollo del cuadrado de un binomio: (6x + 10)2,

 Se calcula la raíz cuadrada del primer y tercer término, es decir,

 = 6 y = 10;

 Luego, 36x2 + 120 x + 100 = (6x + 10)(6x + 10) o (6x + 10)2

 **Ejemplo 3:** Factorizar 25r2 – 144

 Esta expresión corresponde al producto de la suma por su diferencia: (5r – 12)(5r + 12)

 Se calcula la raíz de ambos coeficientes, es decir, = 5 y = 12

 Luego, 25r2 – 144 = (5r – 12)(5r + 12)

**Ejemplo 4:** Factorizar 169x8z6 – 81y10

 Esta expresión corresponde al producto de la suma por su diferencia

 Luego, 169x8z6 – 81y10 = (13x4z3 – 9y5)(13x4z3 + 9y5)

* **Completación del cuadrado de binomio:** Expresiones de la forma **ax2 + bx + c** pueden ser expresadas en función de un cuadrado de binomio.

Para ello, hay que recordar que: **(a b)2 = a2 2ab + b2**

|  |  |
| --- | --- |
|  | x^2 + 6x + 7 |
|   | ("b" es 6 en este caso) |
|   |  |
| Completa el Cuadrado: |
|   | x^2 + 6x + (6/2)^2 + 7 - (6/2)^2 También **resta**el nuevo término |
| Simplifícalo y listo. |
|   | se simplifica a (x+3)^2 |

**Ejemplo 1:**

El resultado: x2 + 6x + 7   =   (x+3)2 – 2

**Ejemplo 2:** Expresar 4x2 + 12x +14 en función de un cuadrado de binomio:

 Podemos utilizar la siguiente expresión:

 , remplazando nos quedaría

 (2x + 3)2  9 + 14 = (2x + 3)2 + 5.

El resultado: 4x2 12x + 14 = (2x + 3)2 + 5

**4.- Operaciones con fracciones algebraicas**

**4.1 Simplificación:**

**Ejemplos:** Simplificar las fracciones algebraicas:

1. , extraemos factor común x en el numerador y en el denominador

simplificamos =

1. , extraemos factor común x en el numerador = , multiplicamos numerador y

 denominador por −1, por lo que obtendremos una fracción equivalente

 Aplicamos la propiedad conmutativa en el denominador

 , simplificamos =

1. , factorizamos por producto de binomios = ,

simplificamos por =

**4.2.- Operaciones con fracciones algebraicas**

* **Adición y sustracción de fracciones algebraicas con igual denominador:**

Se procede de igual manera que con las fracciones aritméticas, es decir, conservando el denominador y sumando los numeradores:

Forma general:





* **Adición y sustracción de fracciones algebraicas con distinto denominador**





* **Multiplicación de fracciones algebraicas**

**Recuerda que:**

Para multiplicar fracciones algebraicas debes:

1. Descomponer en factores los polinomios que figuran en los numeradores y denominadores.
2. Simplificar los factores comunes del numerador y del denominador
3. Multiplicar los factores restantes.

**Ejemplo 1:** Multiplicar

 = , (simplificamos 4 con el 2, x con x, (x + 3y) con (x + 3y)),

nos quedaría =

**Ejemplo 2:** Multiplicar

  = , (simplificamos (a - 3) con un (a - 3), (a - 1) con

 (a - 1),

 nos quedaría, =

* **División de fracciones algebraicas**

**Recuerda que:**

**Ejemplo 1:** Dividir

 = , (simplificamos x con x, 2 con el 4), nos quedaría =

**Ejemplo 2:** Dividir

 = = ,

(simplificamos (x - 2) con (x - 2), (x + 3) con (x + 3)), nos quedaría =

**Liceo Industrial Superior Talca**

**Dpto. de Matemáticas.**

 **Prof(a): Marisol Martínez B.**

**EJERCICIOS PROPUESTOS**

2° Eje Temático: Algebra y funciones

Esta sección la unidad 1, te entrega un conjunto de preguntas similares a las que pueden aparecer en una

Prueba de Matemática. En su mayoría, las preguntas se relacionan con la materia expuesta

anteriormente.

1. ¿Cuál de las siguientes expresiones equivale a x2 – 2x – 15?
2. (x + 3)(x – 5)
3. (x + 3)(x + 5)
4. (x – 3)(x – 5)
5. (x – 3)(x + 5)
6. (x + 2)(x –15)

1. Al simplificar: , con x 1, queda:
2. (x + 1)
3. (x + 1)2
4. (x – 1)2
5. (x – 1)
6. (x + 2)
7. Al resolver x – [x – {y – (2x – y)} + x – (-y)] se obtiene:
8. 3x – y
9. x + y
10. x – 3y
11. 3y – x
12. y – 3x

1. Al resolver y reducir la expresión: (5p – 2)(3 + p) – (6 – p)2
2. 4p2 + 25p – 42
3. 4p2 + 25p – 30
4. 4p2 + 25p + 30
5. 4p2 – 25p – 42
6. 3p2 + 25p – 42
7. Los lados de un rectángulo son (2x + 3y) y (5x – y) entonces su perímetro es:
8. 7x + 2y
9. 10x2 – 3y2
10. 14x + 4y
11. 10x2 + 13y – 3y2
12. 7x2 + 2y2
13. Al reducir a su mínima expresión queda:
14. m – 5
15. m2 – 6
16. m – 6
17. Si m 0 y x 0, entonces: =
18. (4h – 7)2 – (5 – 3h)2 =
19. 7h2 – 20h + 24
20. h2 – 26h – 24
21. 7h2 – 26h + 24
22. 24h2 – 86h + 74
23. 25h2 – 26h + 24
24. La expresión u2 + 10u + 20 puede escribirse como:

I: (u + 5)2 – 5 II: u2 + 10(u + 2) III: u(u + 10) + 20

De estas, es(son) **verdadera**(s):

1. Solo II
2. Solo III
3. Solo II y III
4. Solo I y II
5. I, II y III
6. Al resolver (3x – 4y)2 se obtiene:
7. 9x2 – 16y2
8. 9x2 + 16y2
9. 6x2 – 8y2
10. 9x2 – 12xy + 16y2
11. 9x2 – 24xy + 16y2
12. Una impresora imprime en 5 minutos un total de 12 páginas. Si este rendimiento se mantiene constante, en imprimir un documento de 240 páginas demorara:
13. 90 minutos
14. 1 hora 12 minutos
15. 1 hora 40 minutos
16. 1,4 horas
17. 1,2 horas
18. La expresión: equivale a:
19. 13v
20. 3v2 + 2v
21. 3v2 + 2
22. 3v + 2
23. 15v2 + 2
24. El valor numérico de la expresión: es:
25. 1
26. 12,52
27. 28,04
28. Otro valor
29. El valor de u en la expresión: es:
30. 4,84
31. 11
32. 121
33. 14641
34. No se puede calcularse
35. Se compra una herramienta en $8.850. Si este precio incluye un 19% de impuesto (IVA), ¿Cuál es su precio sin impuesto?
36. $ 1.593
37. $ 7.437
38. $ 8.400
39. $ 4.917
40. $ 7.500
41. Al factorizar 1 – a2 se obtiene:
42. (1 – a)2
43. (1– a)(1+ a)
44. (a + 1)(a – 1)
45. a·(1 – a )
46. –a2
47. Al simplificar la expresión  se obtiene:
48. 
49. 
50. 
51. 
52. a – 2
53. La expresión “el cuadrado de la diferencia entre a y b” es:
54. (a – b)2
55. a2 – b2
56. a – b2
57. 2(a – b)
58. 
59. Si a = -1 y b = -2, el valor de a – ab es:
60. -1
61. -2
62. 1
63. -3
64. 2
65. Al reducir la expresión  se obtiene:

a) 

b) 

c) –a

d) 0

e) 

1. El producto (2x – 3y)(4x + 5y) es igual a:
2. 8x2 – 15y2
3. 8x2 + 22xy – 15y2
4. 8x2 – 2xy – 15y2
5. 8x2 + 2xy + 15y2
6. 8x2 – 10xy – 15y2
7. Si 2,5 metros de una cañería de cobre cuestan $ 3.100, ¿Cuál será el precio de 8,5 metros de la

 cañería comprada al mismo precio unitario?

1. $ 9.118
2. $ 6.855
3. $ 7.750
4. $ 10.540
5. $ 11.400
6. La expresión: h2 + 6h puede expresarse como:

I: h(h + 6) II: (u + 3)2 – 9 III: 6h(h + 1)

De estas, es(son) **falsa**(s):

1. Solo I
2. Solo III
3. Solo II y III
4. Solo I y II
5. I, II y III
6. Si x e y 0, entonces: =?
7. 0
8. En ciertas condiciones, el espacio **S** que recorre un objeto que cae es proporcional al cuadrado del tiempo **t** transcurrido. En lenguaje algebraico, esta proporción es:
9. T = kS2
10. S = Kt2
11. St2 = K
12. S2 = K t
13. S = K
14. Al factorizar x2 + 13x + 12, queda:
15. (x + 4)(x + 3)
16. (x + 6)(x+ 2)
17. (x – 12)(x – 1)
18. (x – 6 )(x – 2)
19. (x +12)(x + 1)
20. Si: i = 2; j -4 y k = -48, entonces: =
21. 14
22. 40
23. 20
24. Al reducir 2a a  se obtiene:

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

1. Se tiene una cierta cantidad de pintura con la que se podría llenar 160 envases de 2,5 litros cada uno. Si solo se cuenta con envases de 2 litros, entonces se podría completar:
2. 128 envases
3. 180 envases
4. 200 envases
5. 212 envases
6. 240 envases
7. Si u = 2m – n ; v = n – m , entonces: u2 – v2 =?
8. 5m2 – 2mn
9. 3m2 – 6mn
10. M2 – 2mn
11. 3m2 – 2mn
12. 3m2 – 2mn + n2
13. -3p · 2pq =
14. -5p2q
15. 6p2q
16. -6pq
17. -6p2q
18. 6pq2
19. Dos litros de pintura alcanzan para cubrir una superficie de 28,5 m2 por mano. ¿Cuantos litros serán necesarios para dar dos manos de pintura a un muro de 2,5 x 4,56 m?
20. 1,6 lt
21. 0,8 lt
22. 1,14 lt
23. 3,2 lt
24. 2,4 lt

|  |
| --- |
|  |

1. En la expresión ax – b = a – bx, el valor de x es:
2. a
3. b
4. –a
5. –b
6. 1
7. Si m + 5n = 5 y n = -2, entonces el valor de m es:
8. 15
9. -5
10. 5
11. -15
12. -10
13. Reducir la siguiente expresión:
14.
15.
16.
17.
18.

1. Si m = y n = -16 entonces el valor de m es:
2. 32
3. -32
4. 8
5. -8
6. -4

1. Factoriza y resuelve:
2. a + b
3. 1 – b
4. 1 + b
5. 1 – b
6. b2 – 1
7. Cuál es el valor de , sabiendo que b ≠ 0?
8. 0
9. 1
10. 2
11. 2a
12. 2b

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

1. Al reducir la expresión:
2. 1 – b
3. 1 + b
4. 1 – b
5. 1 + b

1. La expresión “el doble del cuadrado de a” corresponde a:
2. (2a)2
3. 2(a2)2
4. 2a2
5. (2a2)2
6. a2
7. En la figura, triangulo ABC es rectángulo en B, con AB = 6 y BC = x. Entonces, la hipotenusa AC puede expresarse como:

 C

1.
2.
3. X

 B A

 6

1. Si = 12,5 y = 3,5; entonces, el valor numérico de la expresión es:
2. 1,6
3. 13
4. 12
5. 5,4
6. 0